



TITLE:

# convex functionのなす空間の順序について(Positivityに関連する解析学)

AUTHOR(S):

越, 昭三

---

CITATION:

越, 昭三. convex functionのなす空間の順序について(Positivityに関連する解析学). 数理解析研究所講究録 1985, 544: 1-11

ISSUE DATE:

1985-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98804>

RIGHT:

# convex function のなす空間の

順序について ( Order relation on a space of  
convex functions )

北大理学部

越 昭 三 (Shozo Koshi)

1. Introduction Convex function の conjugate function  
に関する基本定理に Moreau-Rockafellar の定理がある。  
確率的に convex function が与えられたときの平均 function  
とその conjugate (dual) function との関係を表わす定  
理を作ることを目的とする。

2. 定義 話を簡単にするために, ここで考える  
function は実数空間  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  への対応とす  
る。勿論 ここの議論は大半  $\mathbb{R}$  の代りに separative  
locally convex topological vector space 上の function  
で考えてよい。

定義 1  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  が convex とは

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が  $\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1$  かつ  $x, y \in \mathbb{R}$  で成立  
することである。

定義 2.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  が proper とは  $f(x) < +\infty$  となる  $x \in \mathbb{R}$  が少なくとも一つ存在すること。更に  $\mathcal{D}(f) = \{x; f(x) < +\infty\}$  を  $f$  の effective domain と呼び、effective domain は convex set になる。

定義 3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  のとき

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{yx - f(x)\}$$

を  $f$  の conjugate function と呼び、 $f$  が convex proper function のとき  $f^*$  は同じ性質をみたす。

一般に

$$f(x) \geq f^{**}(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

である。

$$f(x) = f^{**}(x)$$

となるための必要十分条件は  $f$  が  $x$  で lower semi-continuous になることである。一般には高々2つの  $x$  の値を除いて  $f(x) = f^{**}(x)$  となる。(R の場合)

定義 4.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  の proper な convex function の全体を  $\mathcal{C}$  で表わす。 $\mathcal{C}$  は convex set でないが  $f \in \mathcal{C}, \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{C}$  であり  $f, g \in \mathcal{C}, \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$

$\neq \emptyset$  で  $\alpha, \beta \geq 0$  ならば  $\alpha f + \beta g \in \mathbb{C}$  となる。

3.  $\mathbb{C}$  の性質  $\mathbb{C}$  は通常の order で 半順序集合になる。

1)  $\mathbb{C}$  は conditionally complete な ordered set である。  $\mathbb{C} \ni f, g$  に對し  $f$  と  $g$  との最小上界が存在するときは  $f \sqcup g$  で表わし,  $f$  と  $g$  との最大下界が存在するときは  $f \sqcap g$  とで表わす。

2)  $\mathbb{C} \ni f, g$  に對し,  $f \sqcup g$  が存在して  $\mathbb{C}$  の要素となるための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad f(x), g(x) < +\infty$$

即ち  $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$  となることである。

3)  $\mathbb{C} \ni f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$  に對し,  $\bigsqcup_\lambda f_\lambda$  ( $f_\lambda$  の最小上界) が存在するための必要十分条件は

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \sup_\lambda f_\lambda(x) < +\infty$$

4) つぎの式は もしも 左辺又は右辺が存在したときに成立する。  $f, f_\lambda \in \mathbb{C}$  として

$$f \sqcap \left( \bigsqcup_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcup_\lambda (f \sqcap f_\lambda)$$

$$f \sqcup \left( \bigsqcap_\lambda f_\lambda \right) = \bigsqcap_\lambda (f \sqcup f_\lambda)$$

ここで  $\bigsqcap_\lambda f_\lambda$  は  $\{f_\lambda\}$  の最大下界を表わす。

5)  $f_n \downarrow f \in \mathbb{C}$  のとき,  $f_n^* \uparrow f^*$  が成立する。

証明)  $f_n(x) \downarrow f(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$  であるから

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_x \{ yx - f(x) \} = \sup_x \sup_n \{ yx - f_n(x) \} \\ &= \sup_n \sup_x \{ yx - f_n(x) \} \\ &= \sup_n f_n^*(y) \quad (\text{証明}) \end{aligned}$$

b)  $f_n \uparrow f \in \mathbb{C}$  のとき  $f_n^* \downarrow f^*$  は一般に成立しない。しかし  $f^* \leq \inf_n f_n^*$  が成立し、高々2点の  $y$  を除いて

$$f_n^*(y) \downarrow f^*(y)$$

が成立する。

証明は Fenchel - Moreau の定理を用いて出す。

下記の example は除外点のあるものである。

$$f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq 0 \\ -\frac{1}{n}x & \text{for } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{for } x \geq n \end{cases}$$

のとき  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  は

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(0) \neq f^*(0)$$

となる。

7)  $f \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda > 0$  のとき

$$(\lambda f)^*(y) = \lambda f^*\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$(f + \alpha)^*(y) = f^*(y) - \alpha$$

$f, g \in \mathbb{C}$  に対して, つぎの infimal convolution を定義する。

$$(f \square g)(x) = \inf \{ f(x_1) + g(x_2) ; x_1 + x_2 = x \}$$

このとき, つぎの Moreau-Rockafellar の公式が成立する。  $f \square g \in \mathbb{C}$  である。

$$(f \circ g)^*(y) = (f^* + g^*)(y)$$

$$(f + g)^*(y) \leq (f^* \circ g^*)(y)$$

しかし, 上の式は高々2点の  $y$  を除いて, 等号が成立する。

#### 4. Moreau-Rockafellar の定理の一般化

$\Omega$  を有限測度空間 (簡単のため一般の測度空間でも或程度成立する),  $P(\Omega)$  を  $\Omega$  から  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  値 measurable function のなす空間,  $S(\Omega)$  を  $\Omega$  から  $\mathbb{R}$  値 measurable function のなす空間とする。 $\mathbb{R}$  から  $P(\Omega)$  への convex operator  $F$  を考える。すなわち

$$F(\alpha x + \beta y) \leq \alpha F(x) + \beta F(y)$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1, x, y \in \mathbb{R}$$

ここで不等号は  $P(\Omega)$  の中での順序, すなわち measure zero を除いて一致する  $P(\Omega)$  の要素は同一視することとするので, measure zero を除いての大小関係とする。

一般的には, convex operator の値域は vector space を考えるのが普通であるが, Young-Fenchel 変換を考えると, vector space をそのままにしては都合が

思くなるのである。ordered vector space を値域にあるような理論 はないわけではないが、理論 (convex analysis) を作るためには若干不備な点がある。

さて、 $F$  の表現定理 を作る必要がある。

定理  $F(x) \in S(\Omega)$  となる  $x \in \mathbb{R}$  が少なくとも一つ存在したとする。このとき  $\mathbb{R} \times \Omega$  上の函数  $F(x, t)$  がつぎの性質をもつように作ることができる。

i)  $\exists$  measure zero set  $A \subset \Omega$  があって、 $t \notin A$  ならば函数  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow F(x, t)$  が proper な convex function である。

ii) すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対して、つぎの函数 ( $\Omega$  上の)  
 $\Omega \ni t \rightarrow F(x, t)$

は  $\Omega$  の可測函数 である。

iii) すべての  $x \in \mathbb{R}$  に対し、 $\Omega$  上の函数としての  $F(x, t)$  は

$$F(x, t) = F(x) \quad (P(\Omega) \text{ の要素として})$$

となる。

ここで、 $F(x, t)$  はすべて各  $t \in \Omega$  に対して  $x$  の convex function であると仮定することができる。したがって、 $F$  の conjugate function の system  $\{F^*(y, t)\}$  が考えられ



る。さて,  $F(x, t)$  の平均 convex function と dual の system  $\{F^*(y, t)\}$  で表現するための条件を求めることにする。

基本 lemma  $f_n \in \mathbb{C}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C}$  のとき,  $f$  の effective domain  $\mathcal{D}(f)$  に内点があるとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(y) = f^*(y)$$

が高々2点の  $y$  を除いて, 成立する。

注意  $\mathcal{D}(f)$  に内点のないときには, もっと別の  $\mathbb{C}$  における位相を考えないと収束に關する必要十分な条件がでない。

この lemma の証明には, つぎの lemma が必要である。

$$\text{lemma} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{C} \quad (f_n \in \mathbb{C})$$

$[a, b] \subset \text{Int}(\mathcal{D}(f)) = \{\mathcal{D}(f) \text{ の内点の集まり} \}$  ならば

$f_n$  は  $f$  に  $[a, b]$  で一様に収束する。

更に  $[a, b]$  で一様 Lipschitz である。(この性質は基本 lemma の証明に必要なが, convex function の収束性の一つの特徴を与えている。)

つぎに, 有限個の convex function  $f_1, f_2, \dots, f_n$  に対し, その Harmonic sum を定義する。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を正数として

$$\lambda_1 f_1^{\lambda_1} \square \lambda_2 f_2^{\lambda_2} \square \cdots \square \lambda_n f_n^{\lambda_n}$$

を一般に  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  の  $(f_1, \dots, f_n)$  に関する Harmonic sum とおけば、 $\square = \square$

$$f_1^{\lambda_1}(x) = f_1\left(\frac{x}{\lambda_1}\right), \quad \dots, \quad f_n^{\lambda_n}(x) = f_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$$

とする。

measure space  $\Omega$  の分割を  $A_1, \dots, A_n$  (measurable) とし、 $\Omega$  の測度  $\mu(\Omega) = 1$  とし  $\mu(A_1), \dots, \mu(A_n) > 0$  とする。  $\lambda_k = \mu(A_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) とし、system  $\{F(x, t)\}$  の近似 Harmonic sum は  $t_k \in A_k$  とし

$$\lambda_1 f_1^{\lambda_1}(\cdot, t_1) \square \lambda_2 f_2^{\lambda_2}(\cdot, t_2) \square \cdots \square \lambda_n f_n^{\lambda_n}(\cdot, t_n)$$

を考へるとかゝるとき、分割を細かにしたときの極限が存在するとき

$$\int_{\Omega} \square F(x, t) d\mu(t)$$

又は

$$\bigoplus_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$$

で表わすことをする。この  $x$  の函数を limiting Harmonic sum w. r. to a measure space  $(\Omega, \mu)$  (今の場合は  $\mu(\Omega) = 1$  だから probability space) という。

以上の準備より Moreau-Rachafeller の定理の積分化定理を示すことにする。

定理  $F$  を  $\mathbb{R}$  から  $P(\Omega)$  への convex operator とし、  
2つの異なる  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  に対して  $F(x_1), F(x_2) \in L^1(\Omega)$   
とする。このとき、 $F(x)$  の平均は convex function  
 $f(x) = \int_{\Omega} F(x, t) d\mu(t)$  に対して、その conjugate

function  $f^*(y)$  は 高々一点の  $y$  でのとき

$$f^*(y) = \bigoplus_{\Omega} F^*(y, t) d\mu(t)$$

が成立する。

この定理は convex function の system の積分によって定義される convex function の conjugate function を system の conjugate function の組の Harmonic sum の極限で本質的に与えられることを示したものである。

証明は基本 lemma から直ちに得られる。基本 lemma の証明はこれ程 trivial ではない。

## References

- (1) A.D.Ioffe and V.M.Tihomirov: Theory of Extremal Problems, North-Holland Pub. Company, (1978)
- (2) S.Koshi and N.Komuro: A generalization of the Fenchel-Moreau theorem, Proc. Japan Acad. 59(1983) 178-181
- (3) R.T.Rockafellar: Network flows and monotropic optimization John Wiley (1984)
- (4) J.V.Tiel: Convex analysis, John Wiley (1984)
- (5) J.Zowe: A duality theorem for a convex programming problem in order complete vector lattices, J.Math.Anal.Appl., 50 (1975) 273-287
- (6) S.Koshi, H.C.Lai and N.Komura: Convex programming on spaces of measurable functions (in preparation, will be published in Hokkaido Mathematical Journal)